

3.2.2 Shodnost trojúhelníků II

Předpoklady: 3201

Pokud mají trojúhelníky speciální vlastnosti, mohou se věty o shodnosti zjednodušit

Př. 1: Zformuluj věty o shodnosti:

- a) rovnoramenných trojúhelníků, b) rovnostranných trojúhelníků,
c) pravouhlých trojúhelníků.

a) věty o shodnosti rovnoramenných trojúhelníků

sss: rovnoramenný trojúhelník má dvě strany (ramena) shodné \Rightarrow dva rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné, pokud se shodují ve dvou různých stranách

sus: stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně

usu: stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do 180°)

b) věty o shodnosti rovnostranných trojúhelníků

sss: rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany shodné \Rightarrow dva rovnostranné trojúhelníky jsou shodné, pokud se shodují v jedné straně

sus: shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníků jsou vždy 60° a tak je shoda úhlů samozřejmá)

usu: shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníků jsou vždy 60° a tak je shoda úhlů samozřejmá)

c) věty o shodnosti pravouhlých trojúhelníků

sss: pro strany pravouhlého trojúhelníka platí Pythagorova věta \Rightarrow dva pravouhlé trojúhelníky jsou shodné, pokud se shodují ve dvou stranách (třetí je určena Pythagorovou větou)

sus: stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně

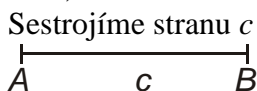
usu: stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do 180°)

Je nutné, aby ve větě **sus** u obecného trojúhelníku byl úhel sevřený stranami?

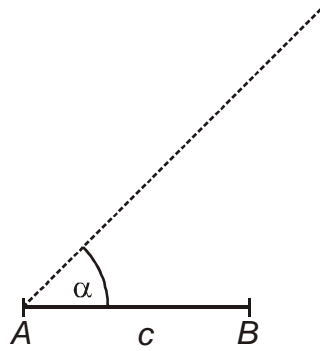
Věty o shodnosti odpovídají jednoznačným postupům při konstrukci trojúhelníka \Rightarrow zkusíme sestrojít trojúhelník podle věty **ssu** (strana, strana, úhel – tedy úhel proti jedné ze stran, ne úhel mezi nimi).

Př. 2: V trojúhelníku ABC jsou dány strany a , c a úhel α . Rozhodni zda, je tento trojúhelník zadán jednoznačně.

Budeme trojúhelník sestrojovat a sledovat, zda není někde více možností.

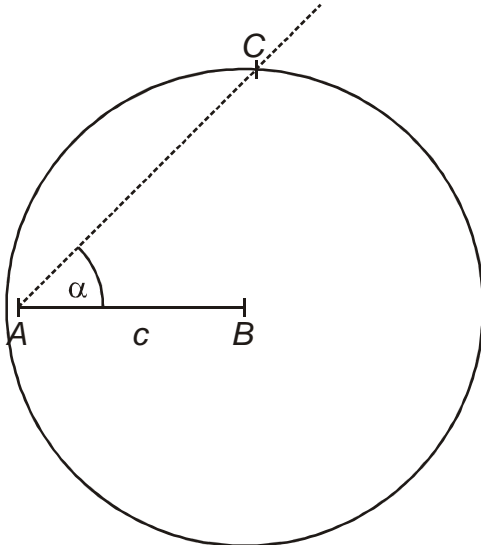


Sestrojíme úhel α



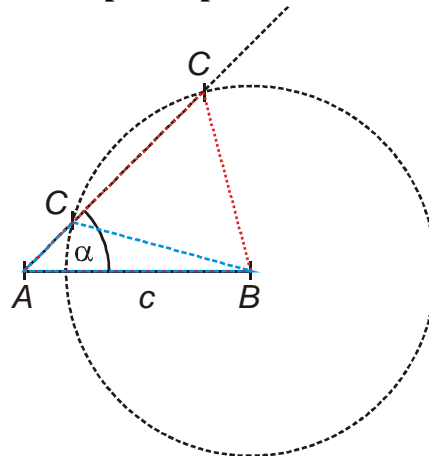
Hledáme vrchol C jako průsečík kružnice $k(B; a)$ se šikmým ramenem úhlu α .

pokud platí $a > c$



Kružnice má s polopřímku jediný průsečík
 \Rightarrow jednoznačná konstrukce \Rightarrow věta o shodnosti **Ssu** (S – strana proti úhlu je větší).

pokud platí $a < c$



Kružnice může mít s polopřímku dva průsečíky \Rightarrow dva různé trojúhelníky \Rightarrow není obecná věta o shodnosti ssu

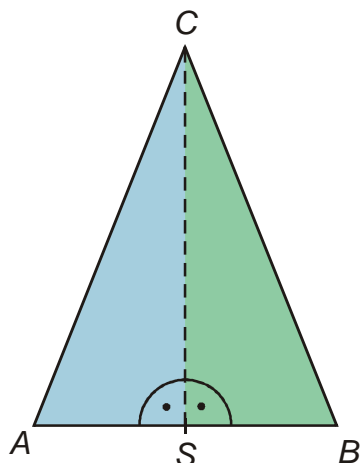
Pedagogická poznámka: Většina studentů kreslí pouze situaci pro $a < c$ (je zajímavé, že si mnohdy nevšimnou, že má dvě řešení, protože místo celé kružnice nakreslí jenom bližší průsečík s polopřímku AC). Když jim připomenete, že poloměr kružnice není znám a může se měnit alespoň část z nich jednoznačné řešení objeví.

Věta Ssu:

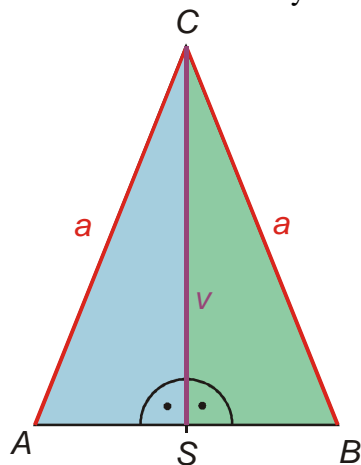
Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Př. 3: Dokaž, že výška na základnu dělí rovnoramenný trojúhelník na dvě shodné poloviny.

Patu výšky označíme S , vzniknou dva trojúhelníky:



Hledáme shodné strany a úhly trojúhelníků ASC a BSC :



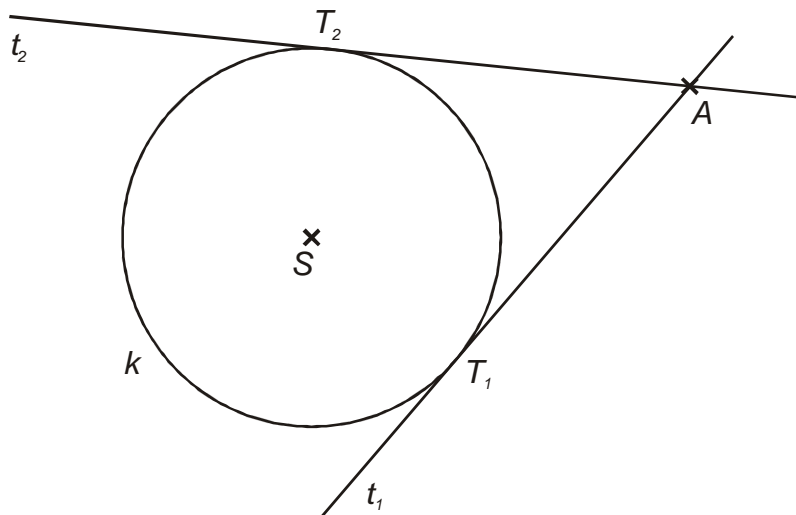
- shodné jsou strany AC a BC (ramena rovnoramenného s trojúhelníku).
- shodné jsou strany SC , protože jde o jednu a tu samou stranu
- shodné jsou úhly při vrcholu S (jsou pravé)

\Rightarrow trojúhelníky ASC a BSC jsou shodné podle věty Ssu .

Pedagogická poznámka: Stejně jako u příkladů v minulé hodině mají studenti tendenci vycházet z neověřených údajů. Konkrétně z rovnosti $|AS| = |BS|$, která z toho, že úsečka SC je výškou v trojúhelníku nijak nevyplývá (a vyplývá až z dokázané shodnosti trojúhelníků ASC a BSC).

Př. 4: Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod A , který leží vně kružnice k . Sestroj tečny kružnice k jdoucí z bodu A , tečné body označ T_1 a T_2 . Dokaž, že platí $|AT_1| = |AT_2|$.

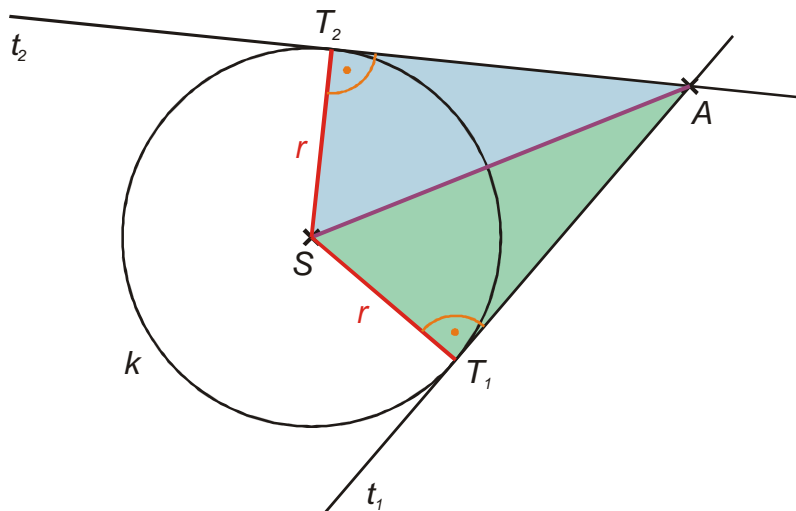
Nakreslíme obrázek:



Shodnost dvou úseček dokážeme pomocí shodnosti dvou trojúhelníků \Rightarrow hledáme dva trojúhelníky, které:

- obsahují úsečky AT_1, AT_2
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici k

\Rightarrow zkusíme využít trojúhelníky AST_1 a $AST_2 \Rightarrow$ hledáme v čem se shodují.



Trojúhelníky AST_1 a AST_2 se shodují:

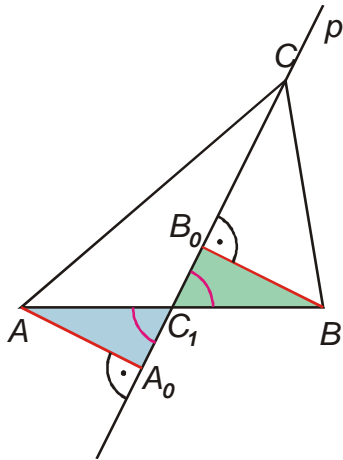
- ve straně AS (je společná obě trojúhelníkům)
- $ST_1 \cong ST_2$ (poloměry kružnice k)
- $\sphericalangle ST_1A \cong \sphericalangle ST_2A$ (pravé úhly, které svírá tečna kružnice s poloměrem)

$\Rightarrow AST_1 \cong AST_2$ (podle věty **Ssu** – úhly $\sphericalangle ST_1A; \sphericalangle ST_2A$ jsou pravé a tedy největší v trojúhelnících \Rightarrow strana SA ležící proti nim musí být největší)

$\Rightarrow |AT_1| = |AT_2|$

Pedagogická poznámka: Největší problém předchozího příkladu je ve volbě trojúhelníků. Studenti nejčastěji volí trojúhelník AT_1T_2 , který rozdělí výškou na dva. Slabina této volby spočívá právě v tom, že nijak nevyužívá fakt, že body T_1 a T_2 leží na kružnici.

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC , p je přímka, na níž leží těžnice t_C tohoto trojúhelníku. Dokaž, že body A, B mají od přímky p stejnou vzdálenost.



Vzdálenosti bodů A, B od přímky p jsou určeny pomocí kolmic k této přímce jako délky úseček $|AA_0|$ a $|BB_0|$.

Hledáme shodné trojúhelníky, které obsahují tyto úsečky.

\Rightarrow Možnost trojúhelníky AA_0C_1 a $BB_0C_1 \Rightarrow$ Snaha najít shodné velikosti nebo úhly:

- $AC_1 \cong BC_1$ (bod C_1 je patou těžnice a tedy středem úsečky AB)
- $\sphericalangle AC_1A_0 \cong \sphericalangle BC_1B_0$ (úhly vrcholové)
- $\sphericalangle AA_0C_1 \cong \sphericalangle BB_0C_1$ (pravé úhly u pat kolmic)

\Rightarrow shodná je i dvojice třetích úhlů (zbytek do 180°) $\sphericalangle C_1AA_0 \cong \sphericalangle C_1BB_0$

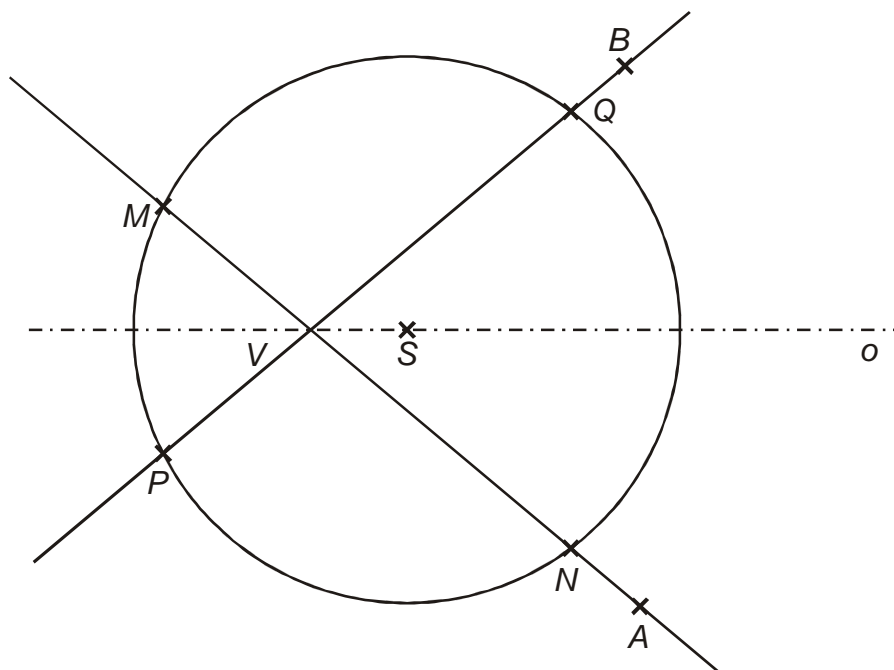
\Rightarrow trojúhelníky jsou shodné podle věty *usu*

$\Rightarrow |AA_0| \cong |BB_0| \Rightarrow$ body A, B mají stejnou vzdálenost od přímky p .

Pedagogická poznámka: Hodně se vyřeší pokud studentům v pravý čas připomenete, že vzdálenost bodu od přímky se určuje pomocí kolmice. Mnozí mají pocit, že není co dokazovat, když bod C_1 je středem úsečky AB .

Př. 6: Na ose o ostrého úhlu AVB sestroj uvnitř úhlu AVB bod S . Sestroj kružnici $k(S; r)$ tak, a by platilo $r > |VS|$. Označ průsečíky přímky AV s kružnicí k jako M, N a průsečíky přímky BV s kružnicí k jako PQ . Dokaž, že platí $|MN| = |PQ|$.

Nakreslíme obrázek:



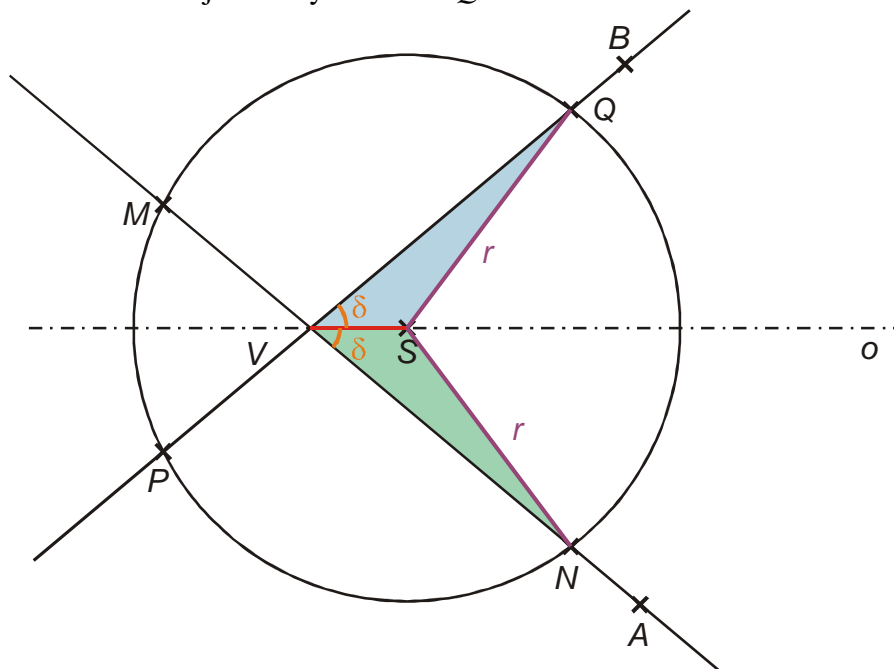
Rychle řešení není vidět, zkusíme příklad rozdělit na dva.

Nejdříve se pokusíme dokázat rovnost: $|VQ| = |VN|$.

Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky VQ a VN
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici k a osu o

⇒ zkusíme trojúhelníky VSN a VSQ :



trojúhelníky se shodují:

- ve straně VS (je společná obě trojúhelníkům)
- $SN \cong SQ$ (poloměry kružnice k)
- $\sphericalangle SVN \cong \sphericalangle SVQ$ (shodné poloviny úhlu BVA)

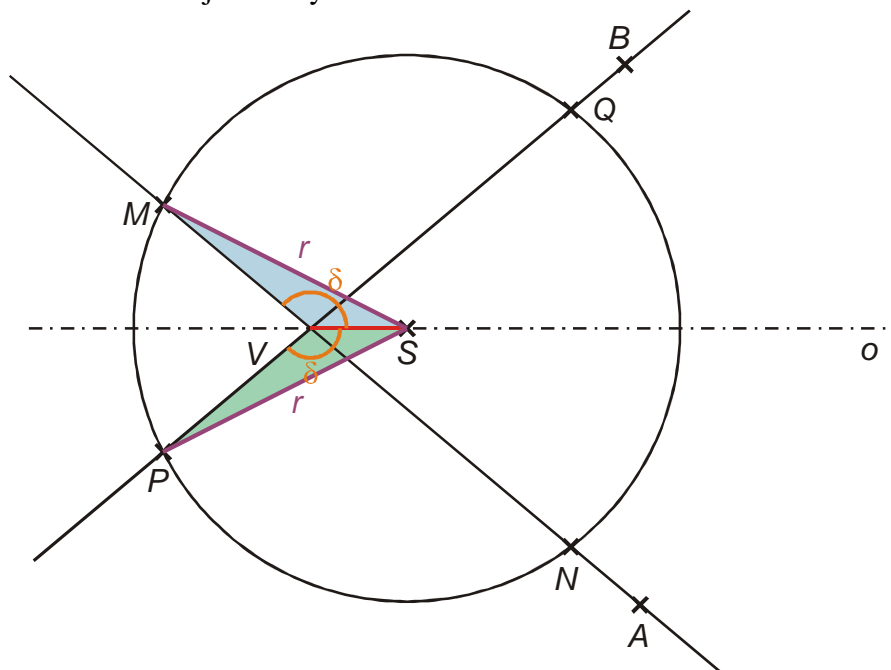
⇒ trojúhelníky jsou shodné podle věty *Ssu* ⇒ platí $|VN| = |VQ|$

Nyní se pokusíme dokázat rovnost: $|MV| = |PV|$.

Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky MV a PV
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici k a osu o

⇒ zkusíme trojúhelníky MVS a PVS :



trojúhelníky se shodují:

- ve straně VS (je společná obě trojúhelníkům)
- $SM \cong SP$ (poloměry kružnice k)
- $\sphericalangle SVM \cong \sphericalangle SVP$ (součet shodných vrcholových úhlů a shodných polovin úhlu BVA)

⇒ trojúhelníky jsou shodné podle věty Ssu ⇒ platí $|MV| = |PV|$

úsečky MN a PQ získáme sečtením dvou dvojic shodných úseček ⇒ platí $|MN| = |PQ|$.

Př. 7: Petáková:
strana 86/cvičení 20

Shrnutí: Velké S ve jménu věty Ssu znamená, že strana proti úhlu musí být větší.